

Espacio-Tiempo de Anti de Sitter

Andrés Pinto¹

Paris Physics Master

Université de Paris - Sorbonne Université

15 de marzo de 2020

1. Convenciones y Notación

La dimensión del espacio-tiempo se denota por D y consideramos letras griegas para índices espacio-temporales $\mu, \nu, \dots = 0, 1, \dots, D - 1$. Mientras que letras latinas para índices espaciales $i, j, \dots = 1, 2, \dots, D - 1$. La métrica del espacio-tiempo se denota por $g_{\mu\nu}$ y la métrica de Minkowski por $\eta_{\mu\nu}$. Además, consideramos signatura $(-, +, +, \dots, +)$ y el sistema de unidades donde $c = 1$. En caso de buscar una mayor rigurosidad y análisis, se recomienda revisar las referencias proporcionadas al final.

2. Deducción de la Métrica

En la presenta sección buscamos la solución más general posible a las ecuaciones de vacío de Einstein que verifique lo siguiente: Debe ser maximalmente simétrica, es decir que la dimensión del espacio vectorial del grupo de isometrías (vectores de Killing) sea $D(D + 1)/2$. Se exige que la métrica sea estacionaria y estática. Las dos condiciones mencionadas se pueden definir estrictamente como: Un espacio-tiempo se dice estacionario si existe un grupo uniparamétrico de isometrías, ϕ_t , cuyas curvas sean de tipo tiempo tal que representan una simetría temporal traslacional, o equivalentemente, un espacio-tiempo estacionario es aquel que posee un vector de Killing de tipo tiempo, ξ^μ . Por otra parte, un espacio-tiempo se dice estático, si es estacionario y adicionalmente existe una hipersuperficie de tipo espacio, Σ , que es ortogonal a las curvas temporales del grupo de isometrías (figura 1), lo cual se resume en $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, donde \mathcal{L}_ξ es la derivada de Lie con respecto al campo ξ [1].

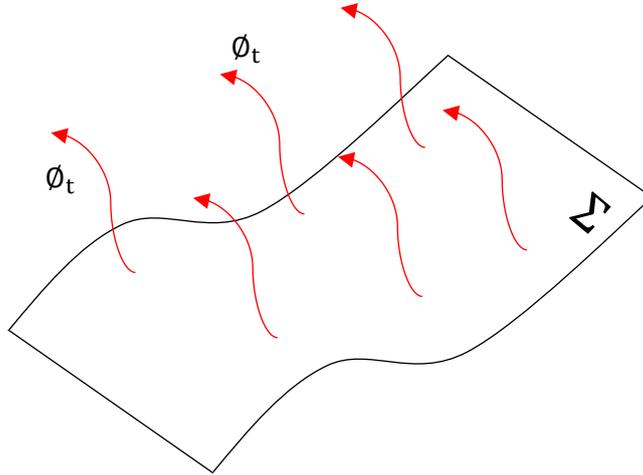


Figura 1: Esquema de un espacio-tiempo estático: Las curvas temporales (rojas, grupo de isometría) son ortogonales a la hipersuperficie espacial Σ .

Esto tiene una gran implicación, ya que el elemento de línea no posee términos cruzados entre tiempo y espacio del tipo $dt dx^i$. Por tanto, el elemento de línea general del tipo,

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^{D-1} f_{\mu\nu}(x^\mu, x^\nu) dx^\mu dx^\nu, \quad (1)$$

¹andrsp1@hotmail.com

con $f_{\mu\nu}$ funciones de todas las coordenadas, puede reducirse al siguiente caso,

$$ds^2 = f_{00}(x^i)dx^0 dx_0 + \sum_{i,j=1}^{D-1} f_{ij}(x^i, x^j)dx^i dx^j. \quad (2)$$

donde las funciones sólo dependen del espacio.

Aún más, exigiremos que el espacio-tiempo sea esféricamente simétrico. Rigurosamente, se dice esféricamente simétrico si el grupo de isometrías contiene un subgrupo isomorfo al grupo especial ortogonal $(D - 1)$ -dimensional, $SO(D - 1)$ y las curvas de este grupo son $(D - 2)$ -esferas [1]. Por tanto, la métrica es invariante bajo rotaciones y ésta induce una métrica proporcional al elemento de línea de la $(D - 2)$ -esfera, S^{D-2} . “Gráficamente” puede entenderse que la parte espacial se divide en sub-esferas (figure 2).

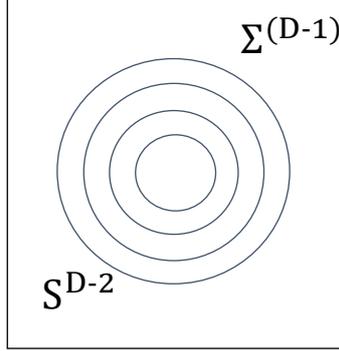


Figura 2: Esquema de un espacio-tiempo $(D - 1)$ -dimensional con simetría esférica.

En $D = 3$ (\mathbb{R}^3), la métrica de la 2-esfera de radio unidad es,

$$d\Omega_2^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (3)$$

mientras que en $(D - 1)$ -dimensiones, tenemos,

$$d\Omega_{D-2}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 (d\theta_2^2 + \sin^2 \theta_2 (d\theta_3^2 + \sin^2 \theta_3 \times \dots \times (d\theta_{D-3}^2 + \sin^2 \theta_{D-3} d\theta_{D-2}^2))), \quad (4)$$

donde la base es $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{D-2}\}$. Por simplicidad notaremos al elemento de línea por $d\Omega_{D-2}$. Cabe resaltar que en el espacio euclideo usual, r , representa el radio de la esfera desde el origen, mientras que en espacios-tiempo curvados, una esfera no necesita un centro. Ejemplo, la variedad puede ser $\mathbb{R} \times S^{D-2}$ y no \mathbb{R}^{D-1} . Con esto en mente diremos que, r , es la coordenada radial pero que no necesariamente representa el radio de una esfera. Considerando la simetría esférica, el elemento de línea se reduce a la forma:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \quad (5)$$

donde $r \in [0, \infty[$ y $t \in]-\infty, \infty[$. Ahora, la física del problema cambia si se introduce la constante cosmológica o no. En particular, nos interesa hallar la **solución de vacío** más general posible que sea **estática, maximalmente simétrica con simetría esférica y constante cosmológica no nula** Λ , que satisfaga,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R + g_{\alpha\beta}\Lambda = 0. \quad (6)$$

donde $R_{\alpha\beta}$ y R son el tensor de Ricci y la curvatura escalar, respectivamente. A partir de ahora, tomamos $D = 4$ tal que:

$$\{x^\mu\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, r, \theta, \varphi\}, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[. \quad (7)$$

Considerando la métrica en cuestión, los símbolos de Christoffel vienen dados por,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta} (\partial_\gamma g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\gamma} - \partial_\delta g_{\beta\gamma}). \quad (8)$$

Para la componente temporal, $\alpha = 0$, tenemos,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_\gamma g_{\beta 0} + \partial_\beta g_{\gamma 0}),$$

donde el último término es nulo ya que la métrica no depende del tiempo. Ahora, si $\beta = \gamma$, se sigue,

$$\Gamma_{\beta\beta}^0 = g^{00}\partial_\beta g_{\beta 0} \Rightarrow \boxed{\Gamma_{\beta\beta}^0 = 0},$$

ya que $\partial_\beta g_{\beta 0} = 0$ para todo valor de β . Es decir, que todos los elementos de la diagonal de $\Gamma_{\alpha\beta}^0$ son nulos. Ahora, si $\beta \neq \gamma$ y además índices espaciales, se tiene,

$$\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2}g^{00}(\partial_j g_{i0} + \partial_i g_{j0}) = 0 \Rightarrow \boxed{\Gamma_{ij}^0 = 0},$$

ya que no existen términos cruzados en la métrica, esta es nula para toda la parte espacial. Sólo nos interesa la parte temporal. Consideremos $\beta \neq \gamma$, tal que los únicos términos que no se anulan son cuando $\beta = 0$ o $\gamma = 0$, es decir

$$\Gamma_{\beta 0}^0 = \frac{1}{2}g^{00}\partial_\beta g_{00} \neq 0 \Leftrightarrow \beta = 1.$$

Por tanto, los símbolos del tipo $\Gamma_{\alpha\beta}^0$ poseen únicamente dos componentes no nulas dadas por,

$$\boxed{\Gamma_{10}^0 = \Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2f(r)}\partial_1 f(r)} \quad (9)$$

Ahora nos encargamos de la componente radial, es decir,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\gamma g_{\beta 1} + \partial_\beta g_{1\gamma} - \partial_1 g_{\beta\gamma}).$$

tomando $\beta \neq \gamma$, se tiene la expresión,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_\gamma g_{\beta 1} + \partial_\beta g_{1\gamma}),$$

Nótese que si $\beta = 0$ o $\gamma = 0$ la expresión siempre se anula, es decir,

$$\Gamma_{0\mu}^1 = 0 \quad \mu \neq 0.$$

Ahora consideramos, β, γ , índices espaciales tal que,

$$\Gamma_{ij}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(\partial_j g_{i1} + \partial_i g_{1j}),$$

que claramente se anulan para $i, j = 2, 3$ ya que no hay términos cruzados de ningún tipo en la métrica. Si $i = 1$ o $j = 1$ tenemos,

$$\Gamma_{i1}^1 = \frac{1}{2}g^{11}\partial_1 g_{i1},$$

que se anula para todo $i \neq 1$. Es decir, que exceptuando la diagonal, todos los términos espaciales son cero. Ésto se resume,

$$\boxed{\Gamma_{\mu\nu}^1 = \Gamma_{\nu\mu}^1 = 0 \quad \mu \neq \nu} \quad (10)$$

Ahora nos enfocamos en la diagonal. Es decir, $\beta = \gamma$, tal que,

$$\Gamma_{\mu\mu}^1 = \frac{1}{2}g^{11}(2\partial_\mu g_{1\mu} - \partial_1 g_{\mu\mu}).$$

Si $\mu = 0, 1, 2, 3$, tenemos los símbolos no nulos para $\Gamma_{\mu\nu}^1$,

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{00} = \frac{1}{2h(r)}\partial_1f(r), \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{11} = \frac{1}{2h(r)}\partial_1h(r), \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{22} = -\frac{1}{2h(r)}\partial_1r^2 = -\frac{r}{h(r)}, \\ \Gamma_{11}^1 &= -\frac{1}{2}g^{11}\partial_1g_{33} = -\frac{1}{2h(r)}\partial_1(r^2\sin^2\theta) = -\frac{r\sin^2\theta}{h(r)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Para las componentes angulares, es necesario enfatizar que los símbolos de Christoffel son los ya conocidos símbolos para la 2-esfera que pueden consultarse en cualquier referencia de geometría diferencial, métodos matemáticos, etc. Por lo tanto sólo se añadirán. Así, los resultados se resumen a continuación:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2f(r)}\frac{\partial f}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2f(r)}\frac{\partial f}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \Gamma_{\mu\nu}^1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2h(r)}\frac{\partial f}{\partial r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2h(r)}\frac{\partial h}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{r}{h(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r\sin^2\theta}{h(r)} \end{pmatrix}, \\ \Gamma_{\mu\nu}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix}, & \Gamma_{\mu\nu}^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/r \\ 0 & 0 & 0 & \cot\theta \\ 0 & 1/r & \cot\theta & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora, para resolver el problema es necesario hallar el tensor de Ricci y la curvatura escalar. En principio existen muchas componentes pero nos enfocamos en las diagonales ya que nos permiten hallar la curvatura escalar. Así, la forma general del tensor es,

$$R_{\sigma\nu} = R_{\sigma\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{\sigma\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho\sigma}^{\lambda}. \quad (12)$$

Para la componente $\sigma = \nu = 0$ tenemos,

$$R_{00} = \partial_{\rho}\Gamma_{00}^{\rho} - \partial_0\Gamma_{\rho 0}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{00}^{\lambda} - \Gamma_{0\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho 0}^{\lambda}.$$

donde cada término viene dado por,

$$\begin{aligned} \partial_{\rho}\Gamma_{00}^{\rho} &= \partial_1\Gamma_{00}^1 = -\frac{f'h'}{2h^2} + \frac{f''}{2h}. \\ \partial_0\Gamma_{\rho 0}^{\rho} &= 0. \\ \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{00}^{\lambda} &= \Gamma_{01}^0\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{11}^1\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{21}^2\Gamma_{00}^1 + \Gamma_{31}^3\Gamma_{00}^1 = \frac{f'}{rh} + \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f'h'}{4h^2}. \\ \Gamma_{0\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho 0}^{\lambda} &= \Gamma_{00}^1\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{01}^1\Gamma_{10}^1 = \frac{f'^2}{2hf}. \end{aligned}$$

tal que,

$$R_{00} = -\frac{f'h'}{2h^2} + \frac{f''}{2h} + \frac{f'}{rh} + \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f'h'}{4h^2} - \frac{f'^2}{2hf} \Rightarrow R_{00} = -\frac{h'f'}{4h^2} + \frac{f'}{hr} - \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f''}{2h}. \quad (13)$$

Considerando $\sigma = \nu = 1$ tenemos,

$$R_{11} = \partial_{\rho}\Gamma_{11}^{\rho} - \partial_1\Gamma_{\rho 1}^{\rho} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\rho}\Gamma_{11}^{\lambda} - \Gamma_{1\lambda}^{\rho}\Gamma_{\rho 1}^{\lambda}.$$

donde cada término viene dado por,

$$\begin{aligned}\partial_\rho \Gamma_{11}^\rho &= \partial_1 \Gamma_{11}^1 = -\frac{h'^2}{2h^2} + \frac{h''}{2h}. \\ \partial_1 \Gamma_{\rho 1}^\rho &= \partial_1 \Gamma_{01}^0 + \partial_1 \Gamma_{11}^1 = -\frac{f'^2}{2f^2} + \frac{f''}{2f} - \frac{h'^2}{2h^2} + \frac{h''}{2h} - \frac{2}{r^2}. \\ \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{11}^\lambda &= (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) \Gamma_{11}^1 = \left(\frac{f'}{2f} + \frac{h'}{2h} + \frac{2}{r} \right) \frac{h'}{2h}. \\ \Gamma_{1\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 1}^\lambda &= \Gamma_{10}^0 \Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{31}^3 = \frac{2}{r^2} + \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'^2}{4h^2}.\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}R_{11} &= -\frac{h'^2}{2h^2} + \frac{h''}{2h} + \frac{f'^2}{2f^2} - \frac{f''}{2f} + \frac{h'^2}{2h^2} - \frac{h''}{2h} + \frac{2}{r^2} + \frac{f'h'}{4hf} + \frac{h'^2}{4h^2} + \frac{h'}{rh} - \frac{2}{r^2} - \frac{f'^2}{4f^2} - \frac{h'^2}{4h^2}. \\ \boxed{R_{11} &= \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f}}\end{aligned}\tag{14}$$

Considerando $\sigma = \nu = 2$ tenemos,

$$R_{22} = \partial_\rho \Gamma_{22}^\rho - \partial_2 \Gamma_{\rho 2}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{22}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\lambda.$$

donde cada término viene dado por,

$$\begin{aligned}\partial_\rho \Gamma_{22}^\rho &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{h} + \frac{rh'}{h^2}. \\ \partial_2 \Gamma_{\rho 2}^\rho &= \partial_2 \Gamma_{32}^3 = \partial_2 \cot \theta = -\csc^2 \theta. \\ \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{22}^\lambda &= (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) \Gamma_{22}^1 = -\frac{2}{h} - \frac{rf'}{2hf} - \frac{rh'}{2h^2}. \\ \Gamma_{2\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 2}^\lambda &= \Gamma_{21}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{32}^3 = \cot^2 \theta - \frac{2}{h}.\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}R_{22} &= -\frac{1}{h} + \frac{rh'}{h^2} + \csc^2 \theta - \frac{2}{h} - \frac{rf'}{2hf} - \frac{rh'}{2h^2} - \cot^2 \theta + \frac{2}{h}, \\ R_{22} &= \underbrace{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta}_{=1} - \frac{1}{h} + \frac{rh'}{2h^2} - \frac{rf'}{2hf}, \\ \boxed{R_{22} &= 1 - \frac{1}{h} + \frac{rh'}{2h^2} - \frac{rf'}{2hf}}.\end{aligned}\tag{15}$$

Finalmente, tomemos $\sigma = \nu = 3$ tal que,

$$R_{33} = \partial_\rho \Gamma_{33}^\rho - \partial_3 \Gamma_{\rho 3}^\rho + \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{33}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\lambda.$$

donde cada término viene dado por,

$$\begin{aligned}\partial_\rho \Gamma_{33}^\rho &= \partial_1 \Gamma_{33}^1 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{h} + \frac{rh' \sin^2 \theta}{h^2}. \\ \partial_3 \Gamma_{\rho 3}^\rho &= 0. \\ \Gamma_{\rho\lambda}^\rho \Gamma_{33}^\lambda &= (\Gamma_{01}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{31}^3) \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 = -\cos^2 \theta - \frac{rf' \sin^2 \theta}{2hf} - \frac{rh' \sin^2 \theta}{2h^2} - \frac{2 \sin^2 \theta}{h}. \\ \Gamma_{3\lambda}^\rho \Gamma_{\rho 3}^\lambda &= \Gamma_{31}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{32}^3 \Gamma_{33}^2 + \Gamma_{13}^1 \Gamma_{33}^3 + \Gamma_{23}^2 \Gamma_{33}^3 = -\frac{2 \sin^2 \theta}{h} - 2 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

por tanto,

$$\begin{aligned}
R_{33} &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{h} + \frac{rh' \sin^2 \theta}{h^2} - \cos^2 \theta - \frac{rf' \sin^2 \theta}{2hf} - \dots \\
&\dots - \frac{rh' \sin^2 \theta}{2h^2} - \frac{2 \sin^2 \theta}{h} + \frac{2 \sin^2 \theta}{h} + 2 \cos^2 \theta, \\
\boxed{R_{33} &= \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{h} - \frac{rf'}{2hf} + \frac{rh'}{2h^2} \right)}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Resumiendo, las componentes diagonales del tensor de Ricci son,

$$\boxed{
\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{h'f'}{4h^2} + \frac{f'}{hr} - \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f''}{2h}. \\
R_{11} &= \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f}. \\
R_{22} &= 1 - \frac{1}{h} + \frac{rh'}{2h^2} - \frac{rf'}{2hf}. \\
R_{33} &= \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{h} - \frac{rf'}{2hf} + \frac{rh'}{2h^2} \right).
\end{aligned}
} \tag{17}$$

Así, el escalar puede obtenerse mediante,

$$\begin{aligned}
R &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = g^{00} R_{00} + g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33}, \\
R &= -\frac{1}{f} R_{00} + \frac{1}{h} R_{11} + \frac{1}{r^2} R_{22} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{33}, \\
R &= \frac{h'f'}{4h^2 f} - \frac{f'}{rhf} + \frac{f'^2}{4hf^2} - \frac{f''}{2hf} + \frac{f'^2}{4hf} + \frac{h'}{rh^2} + \frac{h'f'}{4h^2 f} - \frac{f''}{2hf} + \dots \\
&\dots + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 h} + \frac{h'}{2h^2 r} - \frac{f'}{2hfr} + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 h} - \frac{f'}{2hfr} + \frac{h'}{2rh^2}, \\
R &= \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 h} - \frac{2f'}{rhf} + \frac{f'^2}{2hf^2} + \frac{2h'}{rh^2} + \frac{h'f'}{2h^2 f} - \frac{f''}{hf}.
\end{aligned}$$

Finalmente, la curvatura escalar corresponde a,

$$\boxed{R = \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2 h} - \frac{2f'}{rhf} + \frac{f'^2}{2hf^2} + \frac{2h'}{rh^2} + \frac{h'f'}{2h^2 f} - \frac{f''}{hf}}. \tag{18}$$

Ahora, previo a introducir los elementos encontrados en las ecuaciones de campo, es conveniente expresar Λ en términos de la curvatura escalar. Usando la ec. (6) se sigue,

$$g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} R + g^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \Lambda = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} 4R + 4\Lambda = 0 \Rightarrow \Lambda = \frac{R}{4},$$

tal que las ecuaciones de campo se escriben como,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + g_{\alpha\beta} \Lambda \Rightarrow R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} R \Rightarrow \boxed{R_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} R = 0}. \tag{19}$$

Ahora procedemos a reemplazar los resultados obtenidos. Usando las componentes temporal y radial del tensor de Ricci, tenemos,

$$\begin{cases} R_{00} - \frac{1}{4} g_{00} R = 0 \\ R_{11} - \frac{1}{4} g_{11} R = 0 \end{cases} \Rightarrow R_{11} - \frac{g_{11}}{g_{00}} R_{00} = 0. \tag{20}$$

Reemplazando R_{00} y R_{11} , se sigue,

$$\begin{aligned}\frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f} + \frac{h}{f} \left(-\frac{h'f'}{4h^2} + \frac{f'}{hr} - \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f''}{2h} \right) &= 0, \\ \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f} - \frac{h'f'}{4hf} + \frac{f'}{rf} - \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{2f} &= 0, \\ \frac{h'}{rh} + \frac{f'}{rf} &= 0.\end{aligned}$$

donde se ha obtenido la ecuación,

$$\frac{h'}{h} + \frac{f'}{f} = 0 \Rightarrow -\ln h = \ln f + cst \Rightarrow h(r) = \frac{C}{f(r)}.$$

Para evitar la constante, podemos redefinir el tiempo como $t \rightarrow \sqrt{C}t$ o sin pérdida de generalidad, basta tomar $C = 1$. Por tanto, la métrica viene dada por,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\Omega_2^2. \quad (21)$$

Con esta consideración, R_{00} se reduce a,

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{h'f'}{4h^2} + \frac{f'}{hr} - \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f''}{2h}, \\ &= -\frac{f^2f'}{4} \partial_1 \left(\frac{1}{f} \right) + \frac{ff'}{r} - \frac{f'^2}{4} + \frac{ff''}{2}, \\ &= \frac{f'^2}{4} + \frac{ff'}{r} - \frac{f'^2}{4} + \frac{ff''}{2} \Rightarrow R_{00} = f \left(\frac{f'}{r} + \frac{f''}{2} \right).\end{aligned} \quad (22)$$

mientras que la curvatura escalar,

$$\begin{aligned}R &= \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2h} - \frac{2f'}{rhf} + \frac{f'^2}{2hf^2} + \frac{2h'}{rh^2} + \frac{h'f'}{2h^2f} - \frac{f''}{hf}, \\ &= \frac{2}{r^2} - \frac{2f}{r^2} - \frac{2f'}{r} + \frac{f'^2}{2f} + \frac{2f^2}{r} \partial_1 \left(\frac{1}{f} \right) + \frac{ff'}{2} \partial_1 \left(\frac{1}{f} \right) - f'', \\ &= \frac{2}{r^2} - \frac{2f}{r^2} - \frac{2f'}{r} + \frac{f'^2}{2f} - \frac{2f'}{r} - \frac{f'^2}{2f} - f'' \Rightarrow \boxed{R = \frac{2}{r^2}(1-f) - \frac{4f'}{r} - f''}.\end{aligned}$$

Resumiendo, se tiene R_{00} y R como,

$$\boxed{\begin{aligned}R_{00} &= f \left(\frac{f'}{r} + \frac{f''}{2} \right), \\ R &= \frac{2}{r^2}(1-f) - \frac{4f'}{r} - f''.\end{aligned}} \quad (23)$$

Ahora, podemos resolver la ecuación de Einstein para $\alpha = \beta = 0$ y hallar una ecuación diferencial para $f(r)$, esto es,

$$\begin{aligned}R_{00} - \frac{1}{4}g_{00}R &= 0, \\ f \left(\frac{f'}{r} + \frac{f''}{2} \right) + \frac{f}{4} \left[\frac{2}{r^2}(1-f) - \frac{4f'}{r} - f'' \right] &= 0, \\ \frac{ff'}{r} + \frac{ff''}{2} + \frac{f}{2r^2}(1-f) - \frac{ff'}{r} - \frac{ff''}{4} &= 0, \\ f \left[f'' + \frac{2}{r^2}(1-f) \right] &= 0.\end{aligned}$$

Para no tener una solución trivial, exigimos que el corchete sea nulo y por tanto debemos solucionar la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} f(r) + \frac{2}{r^2} = 0. \quad (24)$$

Para simplificar el problema se toma el cambio de variable $r = e^t$, tal que $dr = e^t dt$ y así las derivadas vienen dadas por,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= e^{-t} \frac{\partial}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= e^{-2t} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\frac{\partial^2 f(r)}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} f(r) + \frac{2}{r^2} = 0 \Rightarrow e^{-2t} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - 2e^{-2t} f + e^{-2t} 2 = 0, \quad (25)$$

el problema a resolver (a coeficientes constantes) es del tipo,

$$\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial f(t)}{\partial t} - 2f(t) = -2. \quad (26)$$

Por ser a coeficientes constantes, buscamos primero la solución homogénea, $h(t)$, mediante el polinomio característico,

$$\frac{\partial^2 h(t)}{\partial t^2} - \frac{\partial h(t)}{\partial t} - 2h(t) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}. \quad (27)$$

por tanto, $h(t)$ es de la forma,

$$h(t) = Ae^{2t} + Be^{-t}. \quad (28)$$

Para hallar la solución general, asumimos una f del tipo $f(t) = h(t) + C$, tal que verifique (26), entonces,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial f}{\partial t} - 2f = -2 \Rightarrow \underbrace{\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - \frac{\partial h}{\partial t} - 2h}_{=0} - 2C = -2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Así, la solución general para f viene dada por,

$$f(t) = Ae^{2t} + Be^{-t} + 1 \xrightarrow{t=\ln r} f(r) = Ae^{\ln r^2} + Be^{\ln(1/r)} + 1 \Rightarrow f(r) = Ar^2 + \frac{B}{r} + 1.$$

Ya que, $r = 0$, es un punto interior del dominio, debemos exigir $B = 0$ para evitar divergencias. Además, elegimos la constante $A = 1/L^2$ donde L es otra constante. Así, el resultado más general al problema viene dado por el elemento de línea,

$$\boxed{ds_{AdS_4}^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2}. \quad (29)$$

El elemento de línea (29) se conoce como el espacio-tiempo de Anti de Sitter en coordenadas globales $\{t, r, \theta, \varphi\}$ que además es invariante bajo $SO(1, D-1)$. Aún más, con la forma de f , el escalar de Ricci viene dado por,

$$R = \frac{2}{r^2}(1-f) - \frac{4f'}{r} - f'' = \frac{2}{r^2} \left(1 - 1 - \frac{r^2}{L^2} \right) - \frac{4}{r} \left(\frac{2r}{L^2} \right) - \frac{2}{L^2} = \frac{-12}{L^2} \Rightarrow \boxed{R = -\frac{12}{L^2}}. \quad (30)$$

Mientras que la constante cosmológica es,

$$\Lambda = \frac{R}{4} = -\frac{3}{L^2} \Rightarrow \boxed{\Lambda = -\frac{3}{L^2}}. \quad (31)$$

Por tanto, AdS es un espacio-tiempo de curvatura escalar y constante cosmológica negativas. Cabe resaltar que la expresión (29) es perfectamente generalizable a D -dimensiones, y esta viene dada por,

$$\boxed{ds_{AdSD}^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2}. \quad (32)$$

donde el cambio se da en el espacio ambiente inducido por la $(D-2)$ -esfera y ahora $r^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{D-1})^2 = \sum_{i=1}^{D-1} (x^i)^2$ es el radio de la hipersfera. Además, la curvatura escalar y la constante cosmológica vienen dadas por,

$$R = -\frac{D(D-1)}{L^2}, \quad \Lambda = -\frac{(D-1)(D-2)}{2L^2}. \quad (33)$$

Cabe resaltar que las coordenadas aquí utilizadas se conocen como coordenadas globales ya que cubren todo el espacio de Anti de Sitter.

3. El Espacio Hiperbólico

El espacio-tiempo $AdSD$ es conocido por ser un espacio-tiempo hiperbólico con dos componentes temporales. Para demostrar ello, primero consideremos \mathbb{R}^3 en coordenadas esféricas. Así, el elemento de línea es,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \Rightarrow \boxed{dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_2^2}. \quad (34)$$

En \mathbb{R}^{D-1} se tiene algo similar,

$$dx^i dx_i = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^{D-1})^2 = dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (35)$$

A partir de las expresiones descritas, se tiene la siguiente relación,

$$\boxed{r^2 d\Omega_{D-2}^2 = dx^i dx_i - dr^2} \quad (36)$$

Introduciendo esta última en el elemento de línea (32), se sigue,

$$\begin{aligned} ds_{AdSD}^2 &= - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2, \\ &= - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} dr^2 - dr^2 + dx^i dx_i, \\ &= - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 + \left(\frac{1}{1 + \frac{r^2}{L^2}} - 1 \right) dr^2 + dx^i dx_i, \\ &= - \left(1 + \frac{r^2}{L^2} \right) dt^2 - \frac{r^2}{L^2 + r^2} dr^2 + dx^i dx_i, \\ &= - \left(\sqrt{L^2 + r^2} \right)^2 \left(\frac{dt}{L} \right)^2 - \left(\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \right)^2 dr^2 + dx^i dx_i, \end{aligned}$$

Ahora introducimos la siguiente identidad,

$$\cos^2 \left(\frac{t}{L} \right) + \sin^2 \left(\frac{t}{L} \right) = 1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
ds_{AdS_D}^2 &= - \left(\sqrt{L^2 + r^2} \right)^2 \left[\cos^2 \left(\frac{t}{L} \right) + \sin^2 \left(\frac{t}{L} \right) \right] \left(\frac{dt}{L} \right)^2 - \dots \\
&\dots - \left(\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \right)^2 \left[\cos^2 \left(\frac{t}{L} \right) + \sin^2 \left(\frac{t}{L} \right) \right] dr^2 + dx^i dx_i, \\
&= - \left\{ \left[\sqrt{L^2 + r^2} \cos \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right]^2 + \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \sin \left(\frac{t}{L} \right) dr \right]^2 \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \left[\sqrt{L^2 + r^2} \sin \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right]^2 + \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cos \left(\frac{t}{L} \right) dr \right]^2 \right\} + dx^i dx_i.
\end{aligned}$$

Ahora, procedemos a añadir el siguiente cero,

$$2 \left[\sqrt{L^2 + r^2} \sin \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right] \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cos \left(\frac{t}{L} \right) dr \right] - 2 \left[\sqrt{L^2 + r^2} \cos \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right] \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \sin \left(\frac{t}{L} \right) dr \right] = 0.$$

tal que la métrica toma la forma,

$$\begin{aligned}
ds_{AdS_D}^2 &= - \left\{ \left[\sqrt{L^2 + r^2} \cos \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right]^2 + \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \sin \left(\frac{t}{L} \right) dr \right]^2 + \dots \right. \\
&\quad \left. + \dots, 2 \left[\sqrt{L^2 + r^2} \cos \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right] \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \sin \left(\frac{t}{L} \right) dr \right] \right\} - \dots \\
&\dots - \left\{ \left[\sqrt{L^2 + r^2} \sin \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right]^2 + \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cos \left(\frac{t}{L} \right) dr \right]^2 - \dots \right. \\
&\quad \left. \dots - 2 \left[\sqrt{L^2 + r^2} \sin \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right] \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cos \left(\frac{t}{L} \right) dr \right] \right\} + dx^i dx_i.
\end{aligned}$$

que se puede simplificar considerando el binomio,

$$\begin{aligned}
ds_{AdS_D}^2 &= - \left[\sqrt{L^2 + r^2} \cos \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} + \frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \sin \left(\frac{t}{L} \right) dr \right]^2 - \dots \\
&\dots - \left[\frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} \cos \left(\frac{t}{L} \right) dr - \sqrt{L^2 + r^2} \sin \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L} \right]^2 + dx^i dx_i.
\end{aligned}$$

Además,

$$d \left(\sin \frac{t}{L} \right) = \cos \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L}, \quad d \left(\cos \frac{t}{L} \right) = - \sin \left(\frac{t}{L} \right) \frac{dt}{L}, \quad d \left(\sqrt{L^2 + r^2} \right) = \frac{r}{\sqrt{L^2 + r^2}} dr.$$

Reemplazando, se sigue,

$$\begin{aligned}
ds_{AdS_D}^2 &= - \left[\sqrt{L^2 + r^2} d \left(\sin \frac{t}{L} \right) + d \left(\sqrt{L^2 + r^2} \right) \sin \left(\frac{t}{L} \right) \right]^2 - \dots \\
&\dots - \left[d \left(\sqrt{L^2 + r^2} \right) \cos \left(\frac{t}{L} \right) + \sqrt{L^2 + r^2} d \left(\cos \frac{t}{L} \right) \right]^2 + dx^i dx_i,
\end{aligned}$$

tomando en cuenta la regla del producto para las derivadas,

$$ds_{AdS_D}^2 = - \left[d \left(\sqrt{L^2 + r^2} \sin \frac{t}{L} \right) \right]^2 - \left[d \left(\sqrt{L^2 + r^2} \cos \frac{t}{L} \right) \right]^2 + dx^i dx_i.$$

Ahora, definimos las siguientes coordenadas,

$$\boxed{
\begin{aligned}
Z^0 &= \sqrt{L^2 + r^2} \sin \frac{t}{L}, \\
Z^D &= \sqrt{L^2 + r^2} \cos \frac{t}{L}, \\
Z^i &= x^i.
\end{aligned}
} \tag{37}$$

donde $i = 1, 2, \dots, D - 1$ y $\sum_{i=1}^{D-1} (Z^i)^2 = r^2$. Así, la métrica se escribe como,

$$\boxed{ds_{AdS_{D+1}}^2 = -(dZ^0)^2 - (dZ^D)^2 + \sum_{i=1}^{D-1} (dZ^i)^2}. \quad (38)$$

Nótese que la métrica AdS_D es la métrica inducida de un espacio hiperbólico con constante cosmológica negativa de $(D + 1)$ -dimensiones donde 2 coordenadas son temporales. Además este espacio-tiempo verifica,

$$\boxed{(Z^0)^2 + (Z^D)^2 - \sum_{i=1}^{D-1} (Z^i)^2 = L^2}. \quad (39)$$

La ecuación (39) describe un espacio-tiempo invariante bajo $SO(2, D - 1)$ que corresponde al grupo de isometrías del hiperboloide cuya apertura (escala de AdS) está regulada por el valor de L . En $D = 4$, el espacio-tiempo AdS_4 es generado por un espacio ambiente de 5 dimensiones.

4. Otras Coordenadas Globales

Un cambio de coordenadas que cubre completamente el espacio-tiempo AdS viene dado por el cambio de variable,

$$\frac{r}{L} = \sinh \rho \Rightarrow \frac{dr}{L} = \cosh \rho d\rho,$$

donde $\rho \in [0, \infty[$. Además,

$$\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{r^2}{L^2} = \cosh^2 \rho, \quad \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{L^2}} = L^2 d\rho^2.$$

Así, el elemento de línea (32), se escribe de la forma,

$$\boxed{ds_{AdS_D}^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + L^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{D-2}^2)}, \quad (40)$$

5. Coordenadas de Poincaré

Las coordenadas de Poincaré o parche de Poincaré, son un conjunto de coordenadas que a diferencia de las ya mostradas, éstas no cubren enteramente el espacio de Anti de Sitter, solamente una porción. Vienen dadas por,

$$\begin{aligned} Z^D &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{L^2 - t^2 + \vec{x}^2}{z^2} \right), \\ Z^{D-1} &= \frac{z}{2} \left(1 - \frac{L^2 + t^2 - \vec{x}^2}{z^2} \right), \\ Z^\mu &= \frac{L}{z} x^\mu. \quad \mu = 0, 1, \dots, D - 2. \end{aligned} \quad (41)$$

donde $\{\vec{x}\} = \{x^1, x^2, \dots, x^{D-2}\}$ son coordenadas transversales a la coordenada $z = x^{D-1}$, y verifican $\vec{x}^2 = \sum_{i=1}^{D-2} (x^i)^2$ ². Para hallar el elemento de línea (38) en las coordenadas (41), es conveniente reescribirlo como,

$$\begin{aligned} ds_{AdS_{D+1}}^2 &= -(dZ^0)^2 - (dZ^D)^2 + \sum_{i=1}^{D-1} (dZ^i)^2, \\ &= -(dZ^D)^2 + (dZ^{D-1})^2 - (dZ^0)^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (dZ^i)^2, \end{aligned} \quad (42)$$

²En $D = 4$ tenemos $\vec{x} = \{x, y\}$ mientras que $z = z$, tal que $\vec{x}^2 = x^2 + y^2$

donde simplemente hemos sacado el término $(D - 1)$ de la suma. Ahora procedemos a hallar los diferenciales,

$$\begin{aligned} dZ^\mu &= -\frac{L}{z^2}x^\mu dz + \frac{L}{z}dx^\mu, \\ (dZ^\mu)^2 &= \frac{L^2}{z^4}(x^\mu)^2 dz^2 + \frac{L^2}{z^2}(dx^\mu)^2 - 2\frac{L^2}{z^3}x^\mu dz dx^\mu. \end{aligned}$$

Nótese que,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{D-2} (dZ^i)^2 &= \frac{L^2}{z^4} dz^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{D-2} (x^i)^2}_{=1} + \frac{L^2}{z^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{D-2} (dx^i)^2}_{=d\vec{x}^2} - 2\frac{L^2}{z^3} dz \underbrace{\sum_{i=1}^{D-2} x^i dx^i}_{=\vec{x} \cdot d\vec{x}}, \\ &= \frac{L^2}{z^4} \vec{x}^2 dz^2 + \frac{L^2}{z^2} d\vec{x}^2 - 2\frac{L^2}{z^3} (\vec{x} \cdot d\vec{x}) dz. \end{aligned}$$

añadiendo la componente temporal, tenemos,

$$\begin{aligned} -(dZ^0)^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (dZ^i)^2 &= -\frac{L^2}{z^4} t^2 dz^2 - \frac{L^2}{z^2} dt^2 + 2\frac{L^2}{z^3} t dz dt + \frac{L^2}{z^4} \vec{x}^2 dz^2 + \frac{L^2}{z^2} d\vec{x}^2 - 2\frac{L^2}{z^3} (\vec{x} \cdot d\vec{x}) dz, \\ &= \frac{L^2}{z^4} (-t^2 + \vec{x}^2) dz^2 + \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) - 2\frac{L^2}{z^3} dz (-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}). \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos hasta ahora,

$$\boxed{- (dZ^0)^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (dZ^i)^2 = \frac{L^2}{z^4} (-t^2 + \vec{x}^2) dz^2 + \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) - 2\frac{L^2}{z^3} dz (-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}).} \quad (43)$$

Para calcular los términos restantes del elemento de línea (42), es conveniente calcular primero las siguientes expresiones,

$$\begin{aligned} Z^D - Z^{D-1} &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{L^2 - t^2 + \vec{x}^2}{z^2} \right) - \frac{z}{2} \left(1 - \frac{L^2 + t^2 - \vec{x}^2}{z^2} \right), \\ &= \frac{L^2 - t^2 + \vec{x}^2}{2z} + \frac{L^2 + t^2 - \vec{x}^2}{2z} = \frac{L^2}{z} \Rightarrow \boxed{Z^D - Z^{D-1} = \frac{L^2}{z}} \end{aligned}$$

por otra parte,

$$\begin{aligned} Z^D + Z^{D-1} &= \frac{z}{2} \left(1 + \frac{L^2 - t^2 + \vec{x}^2}{z^2} \right) + \frac{z}{2} \left(1 - \frac{L^2 + t^2 - \vec{x}^2}{z^2} \right), \\ &= z + \frac{L^2 - t^2 + \vec{x}^2}{2z} - \frac{L^2 + t^2 - \vec{x}^2}{2z}, \\ &= z + \frac{-t^2 + \vec{x}^2}{z} \Rightarrow \boxed{Z^D + Z^{D-1} = z + \frac{-t^2 + \vec{x}^2}{z}} \end{aligned}$$

Tomando los diferenciales, se sigue,

$$\begin{aligned} dZ^D - dZ^{D-1} &= -\frac{L^2}{z^2} dz, \\ dZ^D + dZ^{D-1} &= 2\frac{-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}}{z} - \left(\frac{-t^2 + \vec{x}^2}{z^2} - 1 \right) dz. \end{aligned}$$

Ahora podemos calcular el producto, para obtener,

$$\begin{aligned} -(dZ^D)^2 + (dZ^{D-1})^2 &= (dZ^{D-1} - dZ^D)(dZ^{D-1} + dZ^D), \\ &= \frac{L^2}{z^2} dz \left[2\frac{-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}}{z} - \left(\frac{-t^2 + \vec{x}^2}{z^2} - 1 \right) dz \right], \\ &= 2\frac{L^2}{z^3} dz (-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}) - \frac{L^2}{z^4} (-t^2 + \vec{x}^2) dz^2 + \frac{L^2}{z^2} dz^2. \end{aligned}$$

Con los resultados calculados, se sigue que el elemento de línea viene dado por,

$$\begin{aligned}
& - (dZ^D)^2 + (dZ^{D-1})^2 - (dZ^0)^2 + \sum_{i=1}^{D-2} (dZ^i)^2 = 2 \frac{L^2}{z^3} dz (-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}) - \frac{L^2}{z^4} (-t^2 + \vec{x}^2) dz^2 + \dots \\
& \dots + \frac{L^2}{z^2} dz^2 + \frac{L^2}{z^4} (-t^2 + \vec{x}^2) dz^2 + \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) - 2 \frac{L^2}{z^3} dz (-t dt + \vec{x} \cdot d\vec{x}), \\
& = \frac{L^2}{z^2} dz^2 + \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + d\vec{x}^2) = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2).
\end{aligned}$$

Así, la métrica de AdS en coordenadas de Poincaré es de la forma,

$$\boxed{ds_{AdS_D}^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 - dt^2 + d\vec{x}^2)}, \quad (44)$$

donde es necesario recordar que $d\vec{x}^2$ corresponde a la suma de los diferenciales de $(D-2)$ -coordenadas transversales a z . Nótese que los dos últimos términos de (44) corresponden a la métrica de un espacio plano de $(D-1)$ -dimensiones. Así, elemento de línea se puede reescribir como,

$$\boxed{ds_{AdS_D}^2 = \frac{L^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)}, \quad (45)$$

siendo $\eta_{\mu\nu}$ la métrica del espacio de Minkowski con $(D-1)$ -dimensiones. Además, el elemento de línea (45) permanece invariante bajo los cambios,

$$t \rightarrow kt, \quad z \rightarrow kz, \quad x^i \rightarrow kx^i, \quad k > 0. \quad (46)$$

Como caso particular, si $D = 4$, tenemos $\{\vec{x}\} = \{x, y\}$ con elemento de línea,

$$\boxed{ds_{AdS_4}^2 = \frac{L^2}{z^2} (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2)} \quad (47)$$

Ya que $z = 0$ es un punto excluido del elemento de línea (45), AdS queda dividido en tres regiones como se muestra en el diagrama de Penrose (figura 3). La región $z > 0$ se denomina **el parche de Poincaré**.

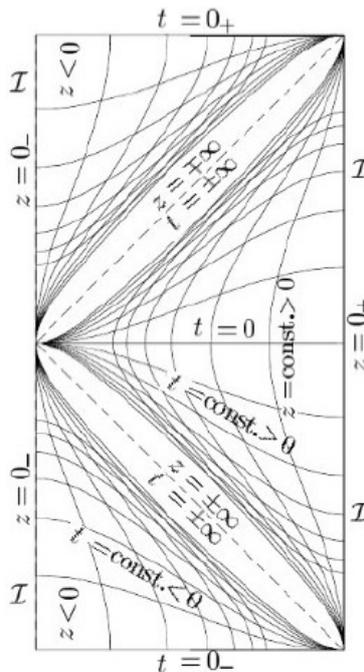


Figura 3: Diagrama de Penrose para el espacio AdS tomado de [2]. Tipo espacio ($t = const$) y tipo tiempo ($z = const$). Cada región está determinada por el signo de z y separadas por horizontes de Cauchy (líneas punteadas). El parche de Poincaré corresponde a la región para $z > 0$.

6. La Frontera de AdS

La mayor parte de este análisis ha sido basado en el tutorial de Javier García, de su curso “Curso de Relatividad General” que puede consultarse en la referencia [3].

El espacio-tiempo AdS posee un sin número de curiosidades y el objetivo de la presente sección es estudiarlas. Comencemos por analizar el movimiento de la luz y las partículas materiales en geodésicas dentro de AdS , haciendo uso de las coordenadas globales en el elemento de línea (40).

$$ds_{AdSD}^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + L^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{D-2}^2). \quad (48)$$

Por tratarse de la luz, se cumple $ds = 0$ tal que,

$$\frac{\cosh^2 \rho}{L^2} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 + \sinh^2 \rho \left(\frac{d\Omega_{D-2}^2}{d\lambda} \right)^2.$$

siendo λ un parámetro³. Ahora, podemos considerar el vector momento D -dimensional de la luz, $\underline{k} = k^\mu e_\mu = (k^0, \vec{k})$. Donde $k^0 = \frac{dx^0}{d\lambda}$ es la componente temporal y \vec{k} las componentes espaciales de $(D-1)$ -elementos⁴. Además, el elemento de línea (48) posee el killing temporal,

$$\vec{\xi} = \vec{e}_0.$$

Ya que la métrica es estacionaria. Así, la energía del fotón E , puede obtenerse de la forma,

$$\underline{k} \cdot \vec{\xi} = -E \Rightarrow k^\mu \vec{e}_\mu \cdot \vec{e}_0 = k^\mu g_{\mu 0} = k^0 g_{00} = -E \Rightarrow \boxed{\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\cosh^2 \rho}}.$$

Además, por tratarse de vectores nulos, se cumple $\underline{k} \cdot \underline{k} = 0$, es decir,

$$\underline{k} \cdot \underline{k} = 0 \Leftrightarrow 0 = g_{00} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + g_{ij} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^j}{d\lambda} \Rightarrow \boxed{\cosh^2 \rho \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = L^2 \left(\frac{d\rho}{d\lambda} \right)^2 + \sum_{i=2}^{D-1} g_{ii} \left(\frac{dx^i}{d\lambda} \right)^2}.$$

Nótese que el problema a resolver consiste en hallar D funciones en términos de λ para luego conectarlas a todas. Ya que el espacio AdS es esféricamente simétrico, podemos analizar el problema de forma radial sin perder generalidad. Ya que, todas las direcciones son equivalentes desde este punto de vista. Así, las ecuaciones a resolver, vienen dadas por,

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\cosh^2 \rho}, \\ \frac{d\rho}{d\lambda} = \pm \frac{\cosh \rho}{L} \frac{dt}{d\lambda}, \end{cases} \Rightarrow \frac{d\rho}{d\lambda} = \pm \frac{E}{L \cosh \rho} \Rightarrow \sinh \rho = \pm \frac{E}{L} \lambda + \lambda_0$$

Considerando la identidad $\cosh^2 \rho - \sinh^2 \rho = 1$, obtenemos,

$$\cosh^2 \rho = 1 + \left(\lambda_0 \pm \frac{E}{L} \lambda \right)^2.$$

Para el tiempo, se sigue,

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{E}{\cosh^2 \rho} = \frac{E}{1 + \left(\lambda_0 \pm \frac{E}{L} \lambda \right)^2} \Rightarrow \int dt = \int d\lambda \frac{E}{1 + \left(\lambda_0 \pm \frac{E}{L} \lambda \right)^2}.$$

³Cuando se estudia partículas materiales, el parámetro es el tiempo propio τ pero en este caso para la luz no se tiene dicho concepto y se parametriza de forma genérica.

⁴En estas coordenadas tenemos $\vec{k} = \left(\frac{dx^1}{d\lambda}, \frac{dx^2}{d\lambda}, \dots, \frac{dx^{D-1}}{d\lambda} \right)$. En $D = 4$ con simetría esférica $\vec{k} = \left(\frac{dr}{d\lambda}, \frac{d\theta}{d\lambda}, \frac{d\phi}{d\lambda} \right)$.

Para integrar tomamos el cambio de variable $u = \lambda_0 \pm \frac{E}{L}\lambda \rightarrow du = \pm \frac{E}{L}d\lambda$, tal que,

$$\begin{aligned} t &= \pm L \int \frac{du}{1+u^2} = \pm L \arctan u, \\ t - t_0 &= \pm L \arctan \left(\lambda_0 \pm \frac{E}{L}\lambda \right), \\ t - t_0 &= L \arctan \left(\frac{E}{L}\lambda \pm \lambda_0 \right), \end{aligned}$$

donde t_0 es una constante de integración y hemos usado el hecho que la función tangente es impar. Así, obtenemos,

$$\boxed{\frac{E}{L}\lambda \pm \lambda_0 = \tan(t - t_0)}. \quad (49)$$

Consideremos la condición inicial $\rho(t = 0) = 0$, entonces,

$$\begin{cases} \lambda_0 \pm \frac{E}{L}\lambda = 0, \\ \frac{E}{L}\lambda \pm \lambda_0 = \tan(-t_0) \end{cases} \Rightarrow \mp \lambda_0 \pm \lambda_0 = \tan(-t_0) \Rightarrow \tan t_0 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t_0 = 0}.$$

Análogamente, exigimos $\rho(\lambda = 0) = 0$ implicando $\lambda_0 = 0$. Finalmente, considerando que $\rho \in [0, \infty[$, las ecuaciones se reducen a,

$$\begin{cases} \sinh \rho = \frac{E}{L}\lambda, \\ \tan(t) = \frac{E}{L}\lambda \end{cases} \Rightarrow \boxed{\sinh \rho = \tan t}. \quad (50)$$

Ahora, con la ecuación del movimiento del fotón, es de interés saber el tiempo que le toma a este alcanzar el infinito, es decir cuando $\rho \rightarrow \infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{\rho \rightarrow \infty} t(\rho) &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \arctan(\sinh \rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left[\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sinh \rho)^{-(2n+1)} \right], \\ &= \frac{\pi}{2} - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{(\sinh \rho)^{2n+1}} = \frac{\pi}{2} - \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{2}{e^\rho - e^{-\rho}} \right)^{2n+1}, \\ &= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \underbrace{\lim_{\rho \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{e^\rho - e^{-\rho}} \right)^{2n+1}}_{=0} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{\rho \rightarrow \infty} t(\rho) = \frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la serie del $\arctan(x)$ de la forma,

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{-(2n+1)}, \quad |x| > 1.$$

Así, hemos obtenido que el tiempo necesario para que un fotón alcance el infinito es $t(\rho \rightarrow \infty) = \pi/2$. Es decir, un observador que envía un fotón al infinito, puede recibirlo nuevamente en un incremento de tiempo $\Delta t = \pi$. Análogamente, un evento el infinito puede influenciar a un observador en un tiempo finito. Esto es totalmente diferente a muchos espacios, en donde, para alcanzar el infinito se requiere un tiempo infinito.

Ahora, estudiamos partículas materiales de masa m y momento $\underline{P} = P^\mu e_\mu = \left(\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^1}{d\tau}, \dots, \frac{dx^{D-1}}{d\tau} \right)$ con τ el tiempo propio. Usando el vector de Killing, tenemos,

$$\underline{P} \cdot \vec{\xi} = P^\mu g_{\mu 0} = m \frac{dt}{d\tau} g_{00} = -E \Rightarrow \boxed{\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{m \cosh^2 \rho}}.$$

mientras que del elemento de línea (radialmente) tenemos,

$$-d\tau^2 = -\cosh^2 \rho dt^2 + L^2 d\rho^2 \Rightarrow \boxed{\cosh^2 \rho \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 - 1 = L^2 \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2}.$$

Así, debemos resolver,

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \pm \frac{1}{L} \left[\frac{E^2}{m^2 \cosh^2 \rho} - 1 \right]^{1/2}.$$

La ecuación diferencial en cuestión no es sencilla de abordar⁵. Sin embargo, su primitiva no es necesaria para el análisis ya que podemos estudiar los casos límites. Primero, si $\rho = 0$, tenemos,

$$\left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_{\rho=0} = \pm \frac{1}{L} \sqrt{\left(\frac{E}{m} \right)^2 - 1}, \quad (51)$$

tal que la tasa de variación de ρ con respecto al tiempo propio siempre es mayor que cero si $E > m$. Lo cual tiene sentido. Ahora, consideremos que la partícula se va al infinito, es decir $\rho \rightarrow \infty$, entonces,

$$\left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow \pm \frac{i}{L} \in \mathbb{C}. \quad (52)$$

Este resultado es contra intuitivo, ya que la tasa de variación al ser compleja carece de interpretación física. Esto implica que una partícula material no puede alcanzar el infinito en un tiempo finito y aún más, la distancia que puede recorrer está limitada por la energía total disponible, es decir cuando $d\rho/d\tau = 0$.

$$\left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_{\rho=\rho_E} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\rho_E = \cosh^{-1} \left(\frac{E}{m} \right)}, \quad (53)$$

donde ρ_E es la densidad de energía para un valor fijo de E . Los resultados en cuestión, permiten intuir que en $\rho \rightarrow \infty$ debería existir algún tipo de "frontera". Para analizarla procedemos a tomar un cambio de variable inspirado en las geodésicas de la luz, de la forma,

$$\tan \chi = \sinh \rho \rightarrow \frac{1}{\cos^2 \chi} d\chi = \cosh \rho d\rho. \quad (54)$$

tal que el elemento de línea (48) toma la forma,

$$\begin{aligned} ds_{AdS_D}^2 &= -\cosh^2 \rho dt^2 + L^2 (d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{D-2}^2), \\ ds_{AdS_D}^2 &= -\underbrace{(1 + \tan^2 \chi)}_{=1/\cos^2 \chi} dt^2 + L^2 \left[\underbrace{\frac{d\chi^2}{\cos^4 \chi (1 + \tan^2 \chi)}}_{=1/\cos^2 \chi} + \tan^2 \chi d\Omega_{D-2}^2 \right], \\ ds_{AdS_D}^2 &= -\frac{1}{\cos^2 \chi} dt^2 + L^2 \left[\frac{d\chi^2}{\cos^2 \chi} + \frac{\sin^2 \chi}{\cos^2 \chi} d\Omega_{D-2}^2 \right], \\ \left(\frac{ds_{AdS_D}}{L} \right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 \chi} \left[-\left(\frac{dt}{L} \right)^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{D-2}^2 \right]. \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos definir un nuevo tiempo $T = t/L$ y $ds = ds_{AdS_D}/L$, tal que el elemento de línea en las nuevas coordenadas viene dado por,

$$\boxed{ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \chi} (-dT^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{D-2}^2)}. \quad (55)$$

⁵La integración puede consultarse en el anexo, sección 9.

Nótese que la métrica cumple: $\rho = 0 \Rightarrow \chi = 0$ y $\rho \rightarrow \infty \Rightarrow \chi = \pi/2$. Es decir, $\chi \in [0, \pi/2[$ tal que la métrica (55) tiene una frontera en $\pi/2$. Entonces, se dice que un espacio tiempo dotado de una métrica, $g_{\mu\nu}$, tiene una frontera conforme, si es del tipo,

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{\psi(x^\alpha)^2} h_{\mu\nu}, \quad (56)$$

donde $h_{\mu\nu}$ es una métrica regular con frontera y $\psi(x^\alpha)$ es una función con un cero $x^\alpha = \mathbf{x}$, siendo \mathbf{x} algún punto del espacio-tiempo. Y además, ψ , verifica lo siguiente,

- $\psi(x^\alpha) > 0$ es positiva en los puntos interiores a la frontera.
- $\psi(x^\alpha)|_{\mathbf{x}} = 0$ se anula en la frontera.
- $\partial_\beta \psi(x^\alpha)|_{\mathbf{x}} \neq 0$ su primera derivada es diferente de cero en la frontera.

Bajo este criterio, podemos concluir que (55) posee una frontera conforme en $\chi = \pi/2$.

7. Aproximándonos a la Frontera

Habiendo determinado la frontera, ahora nos interesa estudiar la física cercana a esta. Para ello, nos aproximamos considerando $\chi = \chi_0 \lesssim \pi/2$, siendo χ_0 un valor menor a $\pi/2$ pero tan cercano como queramos. En dicho caso, el elemento de línea toma la forma,

$$ds^2 = \frac{1}{\underbrace{\cos^2 \chi_0}_{\gg 1}} \left(-dT^2 + \underbrace{d\chi_0^2}_{=0} + \underbrace{\sin^2 \chi_0}_{\simeq 1} d\Omega_{D-2}^2 \right) \quad (57)$$

Ya que siempre es posible redefinir el elemento de línea, consideramos $ds_b^2 = \cos^2 \chi_0 ds^2$ como el elemento de línea cercano a la frontera. Por tanto,

$$ds_b^2 = -dT^2 + d\Omega_{D-2}^2. \quad (58)$$

Para tener una mejor visualización del espacio tiempo, consideremos $D = 4$, entonces,

$$ds_b^2 = -dT^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (59)$$

El espacio al ser maximalmente simétrico, puede ser analizado desde el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$ (Ya que tenemos el Killing $\vec{\xi} = \vec{e}_\phi$). Por tanto,

$$ds_b^2 = -dT^2 + d\varphi^2. \quad (60)$$

Aún más, si el ángulo ϕ es fijado sobre la frontera, nótese que la métrica dependerá únicamente de dT y sería una línea vertical en la que sólo corre el tiempo. Considerando que el ángulo azimutal está en el intervalo $\varphi \in [0, 2\pi[$, la frontera es un cilindro de longitud infinita cuyo frontera es de tipo tiempo (time-like). Cabe resaltar que si $\chi < \pi/2$, la métrica en cuestión describe *AdS* pero cuánto más cercano sea a $\pi/2$, nos acercamos a la frontera conforme. Por tanto, podemos concluir que en la frontera la métrica es **localmente** plana y puede considerarse como el espacio-tiempo de Minkowski ($\sim -dt^2 + dx^2$) con mismo grupo de isometrías. Además, para el caso general D -dimensional, la frontera tiene topología $\mathbb{R} \times \mathcal{S}^{D-2}$

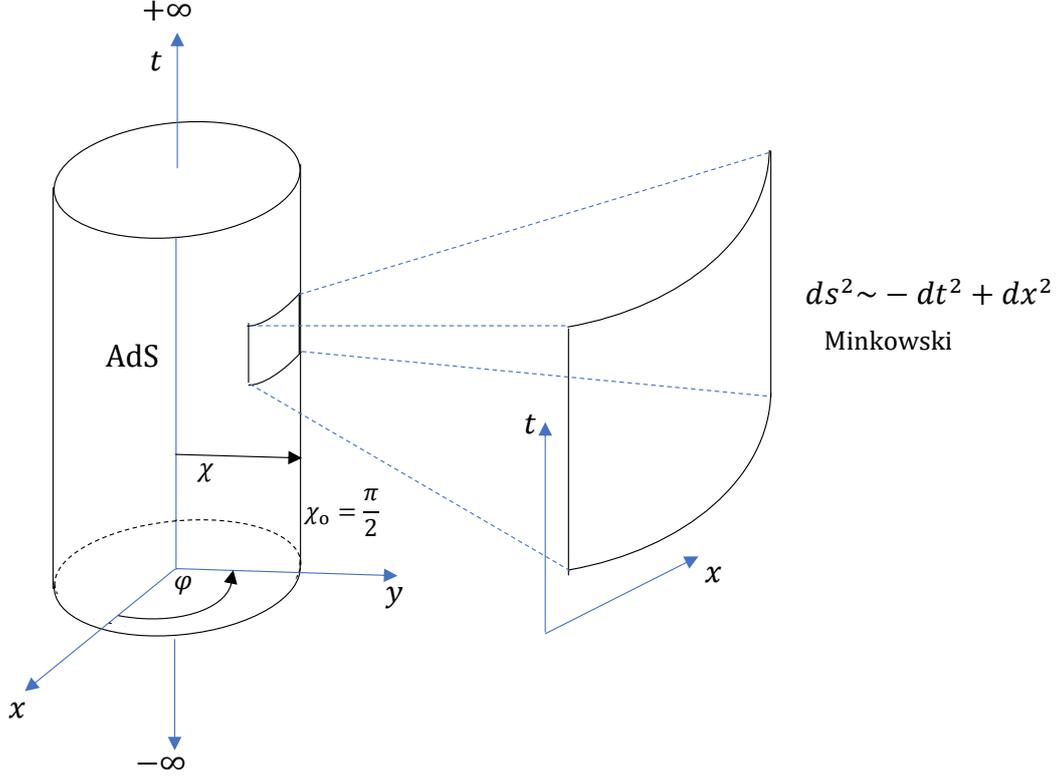


Figura 4: Representación del espacio de Anti de Sitter en 3 dimensiones.

8. Espacio-tiempo de Schwarzschild y su Conexión con AdS

En la presente sección buscamos la solución más general posible a las ecuaciones de vacío de Einstein que verifica las condiciones ya mencionadas. La diferencia ahora es que exigiremos que la constante cosmológica sea nula $\Lambda = 0$, tal que partimos del elemento de línea,

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2.$$

Donde las componentes del tensor de Ricci son las dada por (17), es decir,

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{h'f'}{4h^2} + \frac{f'}{hr} - \frac{f'^2}{4hf} + \frac{f''}{2h}. \\ R_{11} &= \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f}. \\ R_{22} &= 1 - \frac{1}{h} + \frac{rh'}{2h^2} - \frac{rf'}{2hf}. \\ R_{33} &= \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{h} - \frac{rf'}{2hf} + \frac{rh'}{2h^2} \right). \end{aligned}$$

Ahora, a diferencia de *AdS* buscamos resolver,

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0,$$

que además verifica,

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2}R = 0 \Rightarrow R = 0.$$

Así, el problema se reduce a solucionar,

$$R_{\alpha\beta} = 0. \tag{61}$$

Considerando $\alpha = \beta = 0, 1$, tenemos el sistema,

$$\begin{cases} R_{00} = 0. \\ R_{11} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{h'f'}{4h} + \frac{f'}{r} - \frac{f'^2}{4f} + \frac{f''}{2} = 0. \\ \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f} = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{h'f'}{4hf} + \frac{f'}{rf} - \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{f''}{2f} = 0. \\ \frac{f'^2}{4f^2} + \frac{h'}{rh} + \frac{h'f'}{4hf} - \frac{f''}{2f} = 0. \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones, obtenemos,

$$\frac{h'}{rh} + \frac{f'}{rf} = 0 \Rightarrow \frac{dh}{h} = -\frac{df}{f} \Rightarrow \ln h = -\ln f + C \Rightarrow \boxed{h(r) = \frac{\bar{C}}{f(r)}}.$$

donde \bar{C} es una constante que puede elegirse como la unidad o simplemente redefinir las variables en cuestión. Así, el elemento de línea es de la forma,

$$\boxed{ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2}.$$

Con el resultado obtenido, tenemos que R_{22} se reduce a,

$$\begin{aligned} R_{22} &= 1 - \frac{1}{h} + \frac{rh'}{2h^2} - \frac{rf'}{2hf}, \\ &= 1 - f + \frac{rf^2}{2} \partial_1 \left(\frac{1}{f} \right) - \frac{rf'}{2}, \\ &= 1 - f - \frac{rf'}{2} - \frac{rf'}{2} \Rightarrow \boxed{R_{22} = 1 - f - rf'}. \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación de Einstein $R_{22} = 0$, tal que,

$$\begin{aligned} R_{22} &= 0, \\ 1 - f(r) - r \frac{df(r)}{dr} &= 0, \\ 1 - \frac{d}{dr}(rf(r)) &= 0 \\ \frac{d}{dr}(rf(r)) &= 1, \\ rf(r) = r + A &\Rightarrow \boxed{f(r) = 1 + \frac{A}{r}}. \end{aligned}$$

Para determinar la constante A , debemos recurrir al límite Newtoniano⁶. Consideremos una perturbación estacionaria $h_{\mu\nu}$ sobre la métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, es decir,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (62)$$

siendo $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Nos referiremos a esto como orden ε tal que $\varepsilon^2 \sim 0$. Así el análisis se considera sólo a primer orden en ε . Los símbolos de Christoffel vienen dados por,

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \simeq \frac{1}{2} \eta^{\alpha\delta} (\partial_\gamma h_{\beta\delta} + \partial_\beta h_{\delta\gamma} - \partial_\delta h_{\beta\gamma}),$$

donde claramente no aparecen derivadas de $\eta_{\mu\nu}$ ya que es constante. Ahora nos enfocamos en las geodésicas,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0.$$

Para $\mu = i$ siendo i cualquier coordenada espacial, tenemos,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^0}{dt} + \Gamma_{nn}^i \frac{dx^n}{dt} \frac{dx^n}{dt} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} + \Gamma_{0l}^i \frac{dx^0}{dt} \frac{dx^l}{dt} = 0.$$

⁶En el contexto de la Relatividad General el límite clásico consiste en asumir que el espacio es aproximadamente el espacio de Minkowski y que además las velocidades son pequeñas en comparación con la velocidad de la luz.

donde $j \neq k, l \neq 0$, y además hemos considerado que en el límite clásico $\tau \approx t$. Así $dx^0/d\tau \approx 1$ mientras que las componentes de la velocidad son de orden ε . Al multiplicarse por los símbolos de Christoffel pasan a ser $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ y $\sim \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ para el último término. Entonces, la aproximación viene dada por,

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} \simeq -\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{ii} \partial_i h_{00}.$$

Por otra parte, de la mecánica Newtoniana, tenemos,

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Rightarrow -\nabla V = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \Phi}.$$

donde $i = 1, 2, \dots, D-1$, m es la masa, $V = m\Phi$ la energía potencial y Φ el potencial Gravitatorio. Comparando con la expresión de las Geodésicas, tenemos,

$$\begin{cases} \frac{d^2 x^i}{dt^2} = \frac{1}{2} \partial^i h_{00}, \\ \frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\partial^i \Phi \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} \partial^i h_{00} = -\partial^i \Phi \Rightarrow h_{00} = -2\Phi.$$

donde la constante de integración es nula ya que se exige que el potencial sea cero en el infinito. Dentro del límite clásico, tenemos,

$$g_{00} = \eta_{00} + h_{00} \Rightarrow -\left(1 + \frac{A}{r}\right) = -1 - 2\Phi \Rightarrow A = 2r\Phi = -2r \frac{GM}{r} \Rightarrow \boxed{A = -2GM},$$

donde hemos utilizado la forma del potencial gravitatorio newtoniano. Finalmente, hemos obtenido la solución más general posible en $D = 4$ que es maximalmente simétrica, estacionaria, estática, con simetría esférica y constante cosmológica nula cuyo elemento de línea es,

$$\boxed{ds_{BH}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + d\Omega_2^2}. \quad (63)$$

El resultado obtenido es conocido como el agujero negro de Schwarzschild y posee dos discontinuidades, una removible en $r = 2GM$ ⁷ conocida como horizonte de eventos y una no removible en $r = 0$, denominada *singularidad*. Este resultado puede generalizarse a D -dimensiones, como,

$$\boxed{ds_{BH_D}^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r^{D-3}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r^{D-3}}\right)^{-1} dr^2 + d\Omega_{D-2}^2}. \quad (64)$$

La solución de Schwarzschild-de Sitter

Previamente, se obtuvo que al añadir la constante cosmológica, la solución de vacío más general era el espacio de Anti de Sitter siempre y cuando existiera continuidad en $r = 0$. Sin embargo, si $r = 0$ es una singularidad no removible del espacio-tiempo, tenemos el elemento de línea,

$$ds_{AdS-BH}^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (65)$$

mientras que en D -dimensiones,

$$ds_{(AdS-BH)_D}^2 = -\left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2GM}{r^{D-3}}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2GM}{r^{D-3}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2}^2. \quad (66)$$

⁷El sistema de coordenadas en donde es posible remover esta singularidad se conoce como la extensión de Kruskal-Szekeres y puede estudiarse en el curso de Javier García de la referencia [4].

9. Anexo

Buscamos realizar la integral del tipo,

$$I = \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{a^2}{\cosh^2 \rho} - 1}}, \quad a^2 = \frac{E^2}{m^2}. \quad (67)$$

Comenzamos por usar la identidad $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{a^2}{\cosh^2 \rho} - 1}}, \\ &= \int d\rho \frac{\cosh \rho}{\sqrt{a^2 - \cosh^2 \rho}} = \int d\rho \frac{\cosh \rho}{\sqrt{a^2 - 1 - \sinh^2 \rho}}. \end{aligned}$$

Ahora tomamos el cambio de variable $\sqrt{a^2 - 1} x = \sinh \rho \rightarrow \sqrt{a^2 - 1} dx = \cosh \rho d\rho$, tal que la integral es de la forma,

$$\begin{aligned} I &= \int d\rho \frac{\cosh \rho}{\sqrt{a^2 - 1 - \sinh^2 \rho}}, \\ &= \int dx \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{(a^2 - 1) - (a^2 - 1)x^2}}, \\ &= \int dx \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{\sqrt{(a^2 - 1)}\sqrt{1 - x^2}}, \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}, \\ &= \arcsin(x) + C, \\ &= \arcsin\left(\frac{\sinh \rho}{\sqrt{a^2 - 1}}\right) + C, \end{aligned}$$

donde la última integral es directa ya que su primitiva es el $\arcsin(x)$. Por tanto, obtenemos el resultado,

$$\boxed{I = \arcsin\left(\frac{\sinh \rho}{\sqrt{\frac{E^2}{m^2} - 1}}\right) + C} \quad (68)$$

Nótese que el resultado es real siempre y cuando $\frac{E^2}{m^2} - 1 \geq 0$.

Referencias

- [1] R. M. Wald, General Relativity. The University of Chicago Press, 1984.
- [2] J. B. Griffiths and J. Podolsky, Exact Space-Times in Einstein's General Relativity. Cambridge University Press, 2009.
- [3] J. García, Curso de Relatividad General. La frontera de Anti de Sitter: <https://www.youtube.com/watch?v=hk4GUW9Xm-A&list=PLAnA8FVrB18DF03y6o-AIYPLK12F1IA25&index=124&t=3749s>, 2020.
- [4] J. García, Curso de Relatividad General. Entrando en un agujero negro: <https://www.youtube.com/watch?v=g-P2aTiKykI&t=4s>, 2020.